

Dorel Duca Ioan Purdea Ovidiu Pop

Ioan Mureșan Nicolae Suciuc Dorel Cosic

MATEMATICĂ

AUXILIAR CURRICULAR
pentru clasa a XII-a

M1+M2

M1	M2
Filierea teoretică, profil real, specializarea matematică-informatică (TC+CD) Filierea Vocațională, profil militar, M.Ap.N., specializarea matematică-informatică (CD)	Filierea teoretică, profil real, specializarea științe ale naturii (TC+CD) Filierea tehnologică, toate calificările profesionale (TC)

Cuprins

1	Funcții primitivabile	7
1.1	Probleme care conduc la noțiunea de primitivă	7
1.2	Primitive. Integrala nedefinită a unei funcții	10
1.3	Operații cu funcții care admit primitive	12
1.4	Metoda integrării prin părți	18
1.5	Metoda schimbării de variabilă	22
1.6	Integrarea funcțiilor raționale	29
1.7	Integrale reductibile la integrale de funcții raționale	42
1.7.1	Integrale din funcții exponențiale	42
1.7.2	Integrale din funcții trigonometrice	43
1.7.3	Calculul integralelor iraționale de forma	48
1.7.4	Calculul integralelor iraționale de forma	49
2	Integrala Riemann	59
2.1	Calculul ariilor suprafețelor plane	59
2.2	Diviziuni ale unui interval compact	62
2.3	Funcții integrabile Riemann	63
2.4	Integrala Riemann	64
2.5	Proprietăți ale funcțiilor integrabile Riemann	67
2.6	Metode de integrare	73
2.7	Calculul limitelor unor șiruri cu ajutorul integralelor	78
2.8	Proprietăți de monotonie ale integralei Riemann	80
2.9	Integrarea funcțiilor continue	83
3	Aplicații ale integralelor	95
3.1	Aria suprafețelor plane	95
3.2	Volumul corpurilor de rotație	98
3.3	Lungimea graficului unei funcții	100

4	Legi de compoziție (operații)	103
4.1	Noțiunea de lege de compoziție (operație)	103
4.2	Proprietăți ale unei legi de compoziție (operație)	106
4.2.1	Asocativitatea	106
4.2.2	Comutativitatea	108
4.2.3	Element neutru	110
4.3	Părți stabile. Lege de compoziție (operație) indusă	111
5	Monoizi și grupuri	119
5.1	Monoizi. Elemente simterizabile	119
5.2	Grupuri	125
5.3	Clasele de resturi modulo n	134
5.4	Morfisme și izomorfisme de grupuri	136
5.5	Subgrupuri	142
5.6	Ordinul unui element într-un grup. Grupuri finite	149
6	Inele și corpuri	157
6.1	Noțiunile de inel și corp. Proprietăți elementare și exemple	157
6.2	Inelul claselor de resturi modulo n	165
6.3	Morfisme și izomorfisme de inele și de corpuri	167
6.4	Subinele și subcorpuri	173
7	Polinoame și funcții polinomiale	181
7.1	Inelul polinoamelor cu coeficienți într-un inel comutativ. Gradul unui polinom. Polinoame inversabile	181
7.2	Divizibilitatea polinoamelor. Împărțirea cu rest a polinoamelor	184
7.3	Împărțirea cu $X - a$. Schema lui Horner	188
7.4	Funcții polinomiale	190
7.5	Cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun	192
7.6	Polinoame ireductibile. Descompunerea polinoamelor în produs de polinoame ireductibile.	197
7.7	Rădăcini ale polinoamelor. Relațiile lui Viète	201
7.8	Câteva tipuri de ecuații algebrice	210
7.8.1	Ecuații binome	210
7.8.2	Ecuații bipătrate	213
7.8.3	Ecuații reciproce de gradul trei	214
7.8.4	Ecuații reciproce de gradul patru	214
7.9	Polinoame cu coeficienți reali	215
7.10	Polinoame cu coeficienți raționali	218
7.11	Polinoame cu coeficienți întregi	219

Capitolul 1

Funcții primitivabile

În acest capitol vom introduce o clasă importantă de funcții reale și anume clasa funcțiilor care admit primitive. Conceptul de **primitivă** leagă între ele două concepte fundamentale ale Analizei Matematice: **derivata** și **integrala**. Vom aborda probleme de natură calitativă privind studiul existenței primitivelor precum și de natura calculatorie relative la metode de calcul de primitive.

1.1 Probleme care conduc la noțiunea de primitivă

Exemplul 1.1.

Presupunem că un corp este aruncat din punctul (x_0, y_0) , unde $x_0 = x(0) = 0$ și $y_0 = y(0)$, sub unghiul $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, cu viteza inițială v_0 (m/s). Atunci componenta orizontală a vectorului viteză \vec{v} la momentul $t = 0$ este $v_0 \cos \theta$, iar componenta verticală este $v_0 \sin \theta$.

În cele ce urmează neglijăm rezistența aerului și faptul că pământul nu este plat.

Atunci viteza corpului în direcția orizontală (axa Ox) este constantă, adică

$$x'(t) = v_0 \cos \theta, \text{ oricare ar fi } t \geq 0.$$

Urmează că $x(t) = (v_0 \cos \theta)t + c_0$, oricare ar fi $t \geq 0$. Cum $x(0) = 0$, obținem că $c_0 = 0$ și deci

$$x(t) = (v_0 \cos \theta)t, \text{ oricare ar fi } t \geq 0.$$

Pe de altă parte, accelerația în direcția verticală (axa Oy), în lipsa rezistenței aerului, se datorează numai gravitației, adică avem

$$y''(t) = -g, \text{ oricare ar fi } t \geq 0,$$

(unde $g \simeq 9,81 \text{ cm/s}^2$ este accelerația gravitațională). Rezultă că

$$y'(t) = -gt + c_1, \text{ oricare ar fi } t \geq 0,$$

și cum $y'(0) = v_0 \sin \theta$, obținem că $c_1 = v_0 \sin \theta$ și deci

$$y'(t) = -gt + v_0 \sin \theta, \text{ oricare ar fi } t \geq 0.$$

De aici deducem că $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \theta)t + c_2$, oricare ar fi $t \geq 0$. Întrucât $y(0) = y_0$, obținem că $c_2 = y_0$. Așadar

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \theta)t + y_0, \text{ oricare ar fi } t \geq 0.$$

Elininând parametrul t , obținem ecuația carteziană explicită a traiectoriei corpului

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + (\tan \theta)x + y_0, \text{ oricare ar fi } x \geq 0.$$

Aplicație: Un tenisman lovește mingea la o înălțime de 50 cm de sol trimitând-o pe o traiectorie înclinată la 45° față de orizontală, cu viteza inițială de 72 km/oră. Neglijând rezistența aerului, traiectoria mingii este o parabolă a cărei ecuație se cere. Care este înălțimea maximă la care ajunge mingea? La ce distanță de tenisman, mingea atinge solul?

În această aplicație, $v_0 = 72 \text{ km/h} = \frac{72000}{3600} \text{ m/s} = 20 \text{ m/s}$ și $y_0 = 50 \text{ cm} = \frac{1}{2} \text{ m}$. Ecuația traiectoriei este

$$y = -\frac{g}{400}x^2 + x + \frac{1}{2}, \text{ unde } x \geq 0.$$

Înălțimea maximă la care ajunge mingea este

$$y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1 + \frac{g}{200}}{\frac{g}{100}} = \frac{g}{100} + \frac{1}{2} \simeq 10,69 \text{ m}.$$

Mingea atinge solul când $y = 0$, adică pe x îl aflăm rezolvând ecuația

$$-\frac{g}{400}x^2 + x + \frac{1}{2} = 0, \quad x > 0.$$

Soluția convenabilă este $x = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{g}{200}}}{\frac{g}{200}} \simeq 41,26 \text{ m}$.

Exemplul 1.2.

Se consideră o bilă de masă m care cade, la momentul $t_0 = 0$, de la o anumită înălțime. Se presupune că rezistența aerului este direct proporțională cu viteza bilei. Ne punem problema determinării vitezei bilei în fiecare moment $t \geq 0$. În acest scop să notăm cu c factorul de proporționalitate, iar cu $v(t)$, respectiv $a(t)$, viteza și respectiv accelerația bilei la momentul t . Atunci

$$ma(t) = mg - cv(t), \text{ oricare ar fi } t \geq 0,$$

unde g este accelerația gravitațională. Ținând seama că accelerația este derivata vitezei, relația precedentă devine

$$v'(t) + \frac{c}{m}v(t) = g \text{ sau } \left(v(t)e^{\frac{ct}{m}} - \frac{gm}{c}e^{\frac{ct}{m}} \right)' = 0, \text{ oricare ar fi } t \geq 0.$$

Utilizând consecința teoremei lui Lagrange care afirmă că o funcție derivabilă care are derivata nulă pe un interval este constantă, rezultă că există $K \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$v(t)e^{\frac{ct}{m}} = \frac{gm}{c}e^{\frac{ct}{m}} + K, \text{ pentru orice } t \geq 0,$$

de unde se deduce formula de calcul pentru $v(t)$.

Exemplul 1.3.

Se consideră un mediu cu temperatura constantă $T_0 = 60^\circ C$ în care se scufundă un corp aflat inițial la $180^\circ C$. Se presupune că viteza de răcire a corpului la momentul $t \geq 0$ este direct proporțională cu diferența dintre temperatura $T(t)$ a corpului și temperatura T_0 a mediului. Ne propunem să aflăm după cât timp temperatura corpului ajunge la $90^\circ C$, știind că după un minut temperatura a coborât la $120^\circ C$.

Să notăm cu c factorul de proporționalitate. Deoarece $T(0) = 180^\circ > T_0 = 60^\circ$ și T este o funcție continuă, rezultă că există un interval $I = [0, t_0]$ cu $t_0 > 0$, inclus în mulțimea $\{t \geq 0 : T(t) > T_0\}$.

Prin ipoteză avem că $T'(t) = c(T_0 - T(t))$, ceea ce se mai scrie și astfel

$$\frac{T'(t)}{T_0 - T(t)} = c \text{ sau } (\ln(T(t) - T_0) + ct)' = 0, \text{ oricare ar fi } t \in I.$$

De aici rezultă că există $K \in \mathbb{R}$ astfel încât $\ln(T(t) - T_0) + ct = K$, oricare ar fi $t \in I$. Ținând seama că $T(1) = 120^\circ$, rezultă $K = c + \ln 60$ și deci

$$\ln(T(t) - T_0) = c + \ln 60 - ct.$$

Dacă $T(t_1) = 90$, atunci $\ln 30 = c + \ln 60 - ct_1$ și deci $t_1 = \frac{\ln 2 + c}{c}$ minute.

Exemplul 1.4.

Presupunem că la o reacție chimică participă două substanțe A și B . Inițial din substanța A sunt a moli, iar din substanța B sunt b moli. În timpul reacției fiecare moleculă din substanța A are nevoie de o moleculă din substanța B . Ne interesează numărul de moli intrați în reacție până la momentul $t > 0$.

Să notăm cu $x(t)$ numărul de moli intrați în reacție până la momentul $t \geq 0$. Se știe că viteza de reacție este proporțională cu produsul cantităților de substanță care nu au intrat încă în reacție. De aici deducem imediat că

$$x'(t) = k(a - x(t))(b - x(t)), \quad (1)$$

constanta k fiind determinată experimental. Din (1) obținem

$$\frac{x'(t)}{a-x(t)} - \frac{x'(t)}{b-x(t)} = k(b-a), \text{ sau } \left(\ln \frac{b-x(t)}{a-x(t)} \right)' = k(b-a),$$

de unde, în baza consecinței teoremei de medie a lui Lagrange, rezultă

$$\ln \frac{b-x(t)}{a-x(t)} = k(b-a)t + c. \quad (2)$$

Dacă la momentul $t = 0$, numărul de moli intrați în reacție este $x(0) \geq 0$, atunci obținem că

$$c = \ln \frac{b-x(0)}{a-x(0)}.$$

Din (2) deducem că $x(t) = \frac{a(b-x(0))e^{k(b-a)t} - b(a-x(0))}{(b-x(0))e^{k(b-a)t} + a-x(0)}$, $t \geq 0$.

În exemplele precedente ne-am confruntat cu problema determinării unor funcții la care se cunoaște derivata.

1.2 Primitive. Integrala nedefinită a unei funcții

În calculul diferențial s-a considerat problema calculării derivatei unei funcții derivabile date. Este posibil să inversăm această problemă în sensul schimbării rolul funcțiilor cunoscute și calculate. Ajungem astfel la

Definiția 2.1.

Fie D o submulțime nevidă a mulțimii numerelor reale \mathbb{R} , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și I o submulțime nevidă a mulțimii D . Spunem că funcția f **admite primitive** (sau că este **primitivabilă**) pe I dacă există o funcție $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât:

- i) funcția F este derivabilă pe I ;
- ii) $F'(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in I$.

Dacă funcția f admite primitive pe mulțimea de definiție D , atunci spunem simplu că funcția f **admite primitive** (sau că este **primitivabilă**).

Exemplul 2.1.

Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 3x^2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, admite primitive pe \mathbb{R} deoarece funcția derivabilă $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $F(x) = x^3$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, are proprietatea că $F'(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Exemplul 2.2.

Funcția $f : (0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \sin x$, oricare ar fi $x \in (0, \pi]$, admite primitive pe $(0, \pi]$ deoarece funcția derivabilă $F : (0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $F(x) = -\cos x$, oricare ar fi $x \in (0, \pi]$, are proprietatea că $F'(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in (0, \pi]$.

Definiția 2.2.

Fie D o submulțime nevidă a mulțimii numerelor reale \mathbb{R} , $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și I o submulțime nevidă a mulțimii D . Se numește **primitivă a funcției f** pe mulțimea I orice funcție $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ care satisface următoarele proprietăți:

- i) funcția F este derivabilă pe I ;
- ii) $F'(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in I$.

Dacă F este o primitivă a funcției f pe mulțimea de definiție D a funcției f , atunci se spune simplu că funcția F este primitivă a funcției f .

Exemplul 2.3.

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 2|x|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $F(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{dacă } x < 0 \\ x^2, & \text{dacă } x \geq 0, \end{cases}$ este o primitivă a funcției f pe \mathbb{R} .

Teorema 2.1.

Fie I un interval nedegenerat din \mathbb{R} și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție.

1° Dacă $F_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ și $F_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ sunt două primitive ale funcției f pe I , atunci există un număr real c astfel încât

$$F_2(x) = F_1(x) + c, \text{ oricare ar fi } x \in I.$$

(Oricare două primitive ale unei funcții primitivabile diferă printr-o constantă).

2° Dacă $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă fixată a funcției f , atunci pentru fiecare primitivă $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ a lui f pe I , există un număr real c , astfel încât $G(x) = F(x) + c$, oricare ar fi $x \in I$.

Observația 2.1. În teorema anterioară, ipoteza că I este interval este esențială. Într-adevăr, pentru funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, funcțiile $F_1, F_2 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin

$$F_1(x) = 0, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ respectiv } F_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x > 0, \end{cases}$$

sunt primitive ale funcției f pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Să observăm că nu există $c \in \mathbb{R}$ ca să avem $F_2(x) = F_1(x) + c$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Subliniem că $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nu este interval.

Definiția 2.3.

Fie I un interval din \mathbb{R} și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care admite primitive pe I . Mulțimea tuturor primitivelor lui f pe I se numește **integrala nedefinită a funcției f** pe I și se notează cu simbolul $\int f(x)dx$ se citește "integrală din $f(x)dx$ ".

Operația de calculare a primitivelor unei funcții care admite primitive se numește **integrare**.

Menționăm că simbolul $\int f(x)dx$ trebuie privit ca o notație indivizibilă, adică părților \int sau dx , luate separat, nu li se atribuie nici o semnificație.

Conform observațiilor de mai sus, rezultă că dacă funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admite primitive pe I și $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f , atunci $\int f(x)dx = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$.

Prin urmare, pentru determinarea mulțimii $\int f(x)dx$, adică a mulțimii primitivelor funcției f pe I , este suficient să determinăm una dintre acestea, pentru că oricare alta diferă printr-o constantă.

1.3 Operații cu funcții care admit primitive

Am văzut că dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție care admite primitive pe I , atunci mulțimea primitivelor sale este o mulțime de funcții inclusă în mulțimea tuturor funcțiilor $F : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Ne punem acum problema operațiilor cu funcții care admit primitive și să vedem dacă este posibilă stabilirea unor rezultate analoge cu cele din calculul diferențial, unde avem, de exemplu, că derivata sumei este egală cu suma derivatelor. Pentru a extinde acest rezultat în cazul primitivelor trebuie să definim operații cu mulțimi de funcții.

Fie I un interval din \mathbb{R} și $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ mulțimea tuturor funcțiilor definite pe I cu valori în \mathbb{R} . Dacă \mathcal{G} și \mathcal{H} sunt submulțimi nevide ale lui $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ și α este un număr real, atunci

$$\mathcal{G} + \mathcal{H} = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : \text{există } g \in \mathcal{G} \text{ și } h \in \mathcal{H} \text{ astfel încât } f = g + h\},$$

și

$$\alpha\mathcal{G} = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : \text{există } g \in \mathcal{G} \text{ astfel încât } f = \alpha g\}.$$

Dacă \mathcal{G} este formată dintr-un singur element g_0 , adică $\mathcal{G} = \{g_0\}$, atunci în loc de $\mathcal{G} + \mathcal{H} = \{g_0\} + \mathcal{H}$ vom scrie simplu $g_0 + \mathcal{H}$.

În cele ce urmează vom nota cu \mathcal{C} mulțimea tuturor funcțiilor constante definite pe I cu valori în \mathbb{R} , adică

$$\mathcal{C} = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : \text{există } c \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } f(x) = c, \text{ oricare ar fi } x \in I\}.$$

Se constată imediat că:

- $\mathcal{C} + \mathcal{C} = \mathcal{C}$;
- $\alpha\mathcal{C} = \mathcal{C}$, oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$,

adică suma a două funcții constante este tot o funcție constantă, iar o funcție constantă înmulțită cu un număr real este tot o funcție constantă.

Cu aceste observații, să ne reamintim că dacă $F_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ pe intervalul $I \subseteq \mathbb{R}$, atunci orice altă primitivă $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ a lui f pe I este de forma $F = F_0 + c$, unde $c : I \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție constantă, adică $c \in \mathcal{C}$. Atunci

$$\int f(x)dx = \{F \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) : F \text{ este primitivă a lui } f \text{ pe } I\} =$$