Dorel Duca Ioan Purdea Ovidiu Pop

Ioan Mureşan Nicolae Suciu Dorel Cosic

MATEMATICĂ

AUXILIAR CURRICULAR
pentru clasa a XII-a

M1+M2

M1	M2
Filiera teoretică, profil real, specializarea matematică-informatică (TC+CD) Filiera Vocaţională, profil militar, M.Ap.N., specializarea matematică-informatică (CD)	Filiera teoretică, profil real, specializarea ştiinţe ale naturii (TC+CD) Filiera tehnologică, toate calificările profesionale (TC)

EDITURA GIL

Cuprins

Capitolul 1

Funcţii primitivabile

În acest capitol vom introduce o clasă importantă de **funcţii reale** şi anume **clasa funcţiilor care admit primitive**. Conceptul de **primitivă leagă** între ele două concepte fundamentale ale Analizei Matematice: **derivata şi integrala**. Vom aborda probleme de natură **calitativă** privind studiul existenţei primitivelor precum şi de natura **calculatorie** relative la metode de calcul de primitive.

1.1 Probleme care conduc la noţiunea de primitivă

Exemplul 1.1.

Presupunem că un corp este aruncat din punctul (x_0, y_0), unde $x_0 = x(0) = 0$ şi $y_0 = y(0)$, sub unghiul $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, cu viteza iniţială v_0 (m/s). Atunci componenta orizontală a vectorului viteză $\overrightarrow{v}$ la momentul $t = 0$ este $v_0 \cos\theta$, iar componenta verticală este $v_0 \sin\theta$.

În cele ce urmează neglijăm rezistenţa aerului şi faptul că pămantul nu este plat.

Atunci viteza corpului în direcţia orizontală (axa Ox) este constantă, adică

$$x'(t) = v_0 \cos\theta, \text{ oricare ar fi } t \geq 0.$$

Urmează că $x(t) = (v_0 \cos\theta)t + c_0$, oricare ar fi $t \geq 0$. Cum $x(0) = 0$, obţinem că $c_0 = 0$ şi deci

$$x(t) = (v_0 \cos\theta)t, \text{ oricare ar fi } t \geq 0.$$

Pe de altă parte, acceleraţia în direcţia verticală (axa Oy), în lipsa rezistenţei aerului, se datorează numai gravitaţiei, adică avem

$$y''(t) = -g, \text{ oricare ar fi } t \geq 0,$$

(unde $g \simeq 9,81$ cm/s^2 este acceleraţia gravitaţională). Rezultă că

$$y'(t) = -gt + c_1, \text{ oricare ar fi } t \geq 0,$$

şi cum $y'(0) = v_0 \sin\theta$, obţinem că $c_1 = v_0 \sin\theta$ şi deci

$$y'(t) = -gt + v_0 \sin\theta, \text{ oricare ar fi } t \geq 0.$$

De aici deducem că $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)t + c_2$, oricare ar fi $t \geq 0$. Întrucât $y(0) = y_0$, obţinem că $c_2 = y_0$. Aşadar

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)t + y_0, \text{ oricare ar fi } t \geq 0.$$

Eliminând parametrul t, obţinem ecuaţia carteziană explicită a traiectoriei corpului

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta}x^2 + (\operatorname{tg}\theta)x + y_0, \text{ oricare ar fi } x \geq 0.$$

Aplicaţie: Un tenisman loveşte mingea la o înălţime de 50 cm de sol trimiţând-o pe o traiectorie înclinată la 45° faţă de orizontală, cu viteza iniţială de 72 km/oră. Neglijând rezistenţa aerului, traiectoria mingii este o parabolă a cărei ecuaţie se cere. Care este înălţimea maximă la care ajunge mingea? La ce distanţă de tenisman, mingea atinge solul?

În această aplicaţie, $v_0 = 72$ km/h$= \frac{72000}{3600}$ m/s$= 20$ m/s şi $y_0 = 50$ cm$= \frac{1}{2}$ m. Ecuaţia traiectoriei este

$$y = -\frac{g}{400}x^2 + x + \frac{1}{2}, \text{ unde } x \geq 0.$$

Înălţimea maximă la care ajunge mingea este

$$y_{\max} = \text{"} -\frac{\Delta}{4a}\text{"} = \frac{1 + \frac{g}{200}}{\frac{g}{100}} = \frac{g}{100} + \frac{1}{2} \simeq 10,69 \text{ m}.$$

Mingea atinge solul când $y = 0$, adică pe x îl aflăm rezolvând ecuaţia

$$-\frac{g}{400}x^2 + x + \frac{1}{2} = 0, \ x > 0.$$

Soluţia convenabilă este $x = \dfrac{1 + \sqrt{1 + \frac{g}{200}}}{\frac{g}{200}} \simeq 41,26$ m.

Exemplul 1.2.

Se consideră o bilă de masă m care cade, la momentul $t_0 = 0$, de la o anumită înălţime. Se presupune că rezistenţa aerului este direct proporţională cu viteza bilei. Ne punem problema determinării vitezei bilei în fiecare moment $t \geq 0$. În acest scop să notăm cu c factorul de proporţionalitate, iar cu $v(t)$, respectiv $a(t)$, viteza şi respectiv acceleraţia bilei la momentul t. Atunci

$$ma(t) = mg - cv(t), \text{ oricare ar fi } t \geq 0.$$

unde g este acceleraţia gravitaţională. Ţinând seama că acceleraţia este derivata vitezei, relaţia precedentă devine

$$v'(t) + \frac{c}{m}v(t) = g \text{ sau } \left(v(t)e^{\frac{ct}{m}} - \frac{gm}{c}e^{\frac{ct}{m}}\right)' = 0, \text{ oricare ar fi } t \geq 0.$$

Utilizând consecinţa teoremei lui Lagrange care afirmă că o funcţie derivabilă care are derivata nulă pe un interval este constantă, rezultă că există $K \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$v(t)e^{\frac{ct}{m}} = \frac{gm}{c}e^{\frac{ct}{m}} + K, \text{ pentru orice } t \geq 0,$$

de unde se deduce formula de calcul pentru $v(t)$.

Exemplul 1.3.

Se consideră un mediu cu temperatura constantă $T_0 = 60°C$ în care se scufundă un corp aflat iniţial la $180°C$. Se presupune că viteza de răcire a corpului la momentul $t \geq 0$ este direct proporţională cu diferenţa dintre temperatura $T(t)$ a corpului şi temperatura T_0 a mediului. Ne propunem să aflăm după cât timp temperatura corpului ajunge la $90°C$, ştiind că după un minut temperatura a coborât la $120°C$.

Să notăm cu c factorul de proporţionalitate. Deoarece $T(0) = 180° > T_0 = 60°$ şi T este o funcţie continuă, rezultă că există un interval $I = [0, t_0]$ cu $t_0 > 0$, inclus în mulţimea $\{t \geq 0 : T(t) > T_0\}$.

Prin ipoteză avem că $T'(t) = c(T_0 - T(t))$, ceea ce se mai scrie şi astfel

$$\frac{T'(t)}{T_0 - T(t)} = c \text{ sau } (\ln(T(t) - T_0) + ct)' = 0, \text{ oricare ar fi } t \in I.$$

De aici rezultă că există $K \in \mathbb{R}$ astfel încât $\ln(T(t) - T_0) + ct = K$, oricare ar fi $t \in I$. Ţinând seama că $T(1) = 120°$, rezultă $K = c + \ln 60$ şi deci

$$\ln(T(t) - T_0) = c + \ln 60 - ct.$$

Dacă $T(t_1) = 90$, atunci $\ln 30 = c + \ln 60 - ct_1$ şi deci $t_1 = \dfrac{\ln 2 + c}{c}$ minute.

Exemplul 1.4.

Presupunem că la o reacţie chimică participă două substanţe A şi B. Iniţial din substanţa A sunt a moli, iar din substanţa B sunt b moli. În timpul reacţiei fiecare moleculă din substanţa A are nevoie de o moleculă din substanţa B. Ne interesează numărul de moli intraţi în reacţie până la momentul $t > 0$.

Să notăm cu $x(t)$ numărul de moli intraţ în reacţie până la momentul $t \geq 0$. Se ştie că viteza de reacţie este proporţională cu produsul cantităţilor de substanţă care nu au intrat încă în reacţie. De aici deducem imediat că

$$x'(t) = k(a - x(t))(b - x(t)), \tag{1}$$

constanta k fiind determinată experimental. Din (1) obţinem

$$\frac{x'(t)}{a-x(t)} - \frac{x'(t)}{b-x(t)} = k(b-a), \text{ sau } \left(\ln\frac{b-x(t)}{a-x(t)}\right)' = k(b-a),$$

de unde, în baza consecinţei teoremei de medie a lui Lagrange, rezultă

$$\ln\frac{b-x(t)}{a-x(t)} = k(b-a)t + c. \tag{2}$$

Dacă la momentul $t = 0$, numărul de moli intraţi în reacţie este $x(0) \geq 0$, atunci obţinem că

$$c = \ln\frac{b-x(0)}{a-x(0)}.$$

Din (2) deducem că $x(t) = \dfrac{a(b-x(0))e^{k(b-a)t} - b(a-x(0))}{(b-x(0))e^{k(b-a)t} + a - x(0)}$, $t \geq 0$.

În exemplele precedente ne-am confruntat cu problema determinării unor funcţii la care se cunoaşte derivata.

1.2 Primitive. Integrala nedefinită a unei funcţii

În calculul diferenţial s-a considerat problema calculării derivatei unei funcţii derivabile date. Este posibil să inversăm aceastăproblemă în sensul schimbării rolul funcţiilor cunoscute şi calculate. Ajungem astfel la

Definiţia 2.1.
Fie D o submulţime nevidă a mulţimii numerelor reale $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie şi I o submulţime nevidă a mulţimii D. Spunem că funcţia f **admite primitive** (sau că este **primitivabilă**) pe I dacă există o funcţie $F : I \to \mathbb{R}$ astfel încât:
i) funcţia F este derivabilă pe I;
ii) $F'(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in I$.
Dacă funcţia f admite primitive pe mulţimea de definiţie D, atunci spunem simplu că funcţia f **admite primitive** (sau că este **primitivabilă**).

Exemplul 2.1.

Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 3x^2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, admite primitive pe $\mathbb{R}$ deoarece funcţia derivabilă $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $F(x) = x^3$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, are proprietatea că $F'(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Exemplul 2.2.

Funcţia $f : (0,\pi] \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \sin x$, oricare ar fi $x \in (0,\pi]$, admite primitive pe $(0,\pi]$ deoarece funcţia derivabilă $F : (0,\pi] \to \mathbb{R}$, definită prin $F(x) = -\cos x$, oricare ar fi $x \in (0,\pi]$, are proprietatea că $F'(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in (0,\pi]$.

Definiţia 2.2.
Fie D o submulţime nevidă a mulţimii numerelor reale $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie şi I o submulţime nevidă a mulţimii D. Se numeşte **primitivă a funcţiei f** pe mulţimea I orice funcţie $F : I \to \mathbb{R}$ care satisface următoarele proprietăţi:
i) funcţia F este derivabilă pe I;
ii) $F'(x) = f(x)$, oricare ar fi $x \in I$.
Dacă F este o primitivă a funcţiei f pe mulţimea de definiţie D a funcţiei f, atunci se spune simplu că funcţia F este primitivă a funcţiei f.

Exemplul 2.3.
Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 2|x|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $F(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{dacă } x < 0 \\ x^2, & \text{dacă } x \geq 0, \end{cases}$ este o primitivă a funcţiei f pe $\mathbb{R}$.

Teorema 2.1.
Fie I un interval nedegenerat din $\mathbb{R}$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie.
1° Dacă $F_1 : I \to \mathbb{R}$ şi $F_2 : I \to \mathbb{R}$ sunt două primitive ale funcţiei f pe I, atunci există un număr real c astfel încât

$$F_2(x) = F_1(x) + c, \text{ oricare ar fi } x \in I.$$

(Oricare două primitive ale unei funcţii primitivabile diferă printr-o constantă).
2° Dacă $F : I \to \mathbb{R}$ este o primitivă fixată a funcţiei f, atunci pentru fiecare primitivă $G : I \to \mathbb{R}$ a lui f pe I, există un număr real c, astfel încât $G(x) = F(x) + c$, oricare ar fi $x \in I$.

Observaţia 2.1. În teorema anterioară, ipoteza că I este interval este esenţială. Într-adevăr, pentru funcţia $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, funcţiile $F_1, F_2 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definite prin

$$F_1(x) = 0, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ respectiv } F_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x < 0 \\ 1, & \text{dacă } x > 0, \end{cases}$$

sunt primitive ale funcţiei f pe $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Să observăm că nu există $c \in \mathbb{R}$ ca să avem $F_2(x) = F_1(x) + c$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Subliniem că $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nu este interval

Definiţia 2.3.
Fie I un interval din $\mathbb{R}$ şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie care admite primitive pe I. Mulţimea tuturor primitivelor lui f pe I se numeşte **integrala nedefinită a funcţiei f** pe I şi se notează cu simbolul $\int f(x)\mathrm{d}x$ se citeşte "integrală din $f(x)\mathrm{d}x$").
Operaţia de calculare a primitivelor unei funcţii care admite primitive se numeşte **integrare**.

Menţionăm că simbolul $\int f(x)\mathrm{d}x$ trebuie privit ca o notaţie indivizibilă, adică părţilor $\int$ sau $\mathrm{d}x$, luate separat, nu li se atribuie nici o semnificaţie.

Conform observaţiilor de mai sus, rezultă că dacă funcţia $f : I \to \mathbb{R}$ admite primitive pe I şi $F : I \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei f, atunci $\int f(x)\mathrm{d}x = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$.

Prin urmare, pentru determinarea mulţimii $\int f(x)\mathrm{d}x$, adică a mulţimii primitivelor funcţi- ei f pe I, este suficient să determinăm una dintre acestea, pentru că oricare alta diferă printr-o constantă.

1.3 Operaţii cu funcţii care admit primitive

Am văzut că dacă $f : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie care admite primitive pe I, atunci mulţimea primitivelor sale este o mulţime de funcţii inclusă în mulţimea tuturor funcţiilor $F : I \to \mathbb{R}$.

Ne punem acum problema operaţiilor cu funcţii care admit primitive şi să vedem dacă este posibilă stabilirea unor rezultate analoage cu cele din calculul diferenţial, unde avem, de exemplu, că derivata sumei este egală cu suma derivatelor. Pentru a extinde acest rezultat în cazul primitivelor trebuie să definim **operaţii cu mulţimi de funcţii**.

Fie I un interval din $\mathbb{R}$ şi $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ mulţimea tuturor funcţiilor definite pe I cu valori în $\mathbb{R}$. Dacă $\mathcal{G}$ şi $\mathcal{H}$ sunt submulţimi nevide ale lui $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ şi α este un număr real, atunci

$$\mathcal{G} + \mathcal{H} = \{f : I \to \mathbb{R} : \text{există } g \in \mathcal{G} \text{ şi } h \in \mathcal{H} \text{ astfel încât } f = g + h\},$$

şi

$$\alpha\mathcal{G} = \{f : I \to \mathbb{R} : \text{există } g \in \mathcal{G} \text{ astfel încât } f = \alpha g\}.$$

Dacă $\mathcal{G}$ este formată dintr-un singur element g_0, adică $\mathcal{G} = \{g_0\}$, atunci în loc de $\mathcal{G} + \mathcal{H} = \{g_0\} + \mathcal{H}$ vom scrie simplu $g_0 + \mathcal{H}$.

În cele ce urmează vom nota cu $\mathcal{C}$ mulţimea tuturor funcţiilor constante definite pe I cu valori în $\mathbb{R}$, adică

$$\mathcal{C} = \{f : I \to \mathbb{R} : \text{există } c \in \mathbb{R} \text{ astfel încât } f(x) = c, \text{ oricare ar fi } x \in I\}.$$

Se constată imediat că:

a) $\mathcal{C} + \mathcal{C} = \mathcal{C}$;

b) $\alpha\mathcal{C} = \mathcal{C}$, oricare ar fi $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$,

adică suma a două funcţii constante este tot o funcţie constantă, iar o funcţie constantă înmulţită cu un număr real este tot o funcţie constantă.

Cu aceste observaţii, să ne reamintim că dacă $F_0 : I \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei $f : I \to \mathbb{R}$ pe intervalul $I \subseteq \mathbb{R}$, atunci orice altă primitivă $F : I \to \mathbb{R}$ a lui f pe I este de forma $F = F_0 + c$, unde $c : I \to \mathbb{R}$ este o funcţie constantă, adică $c \in \mathcal{C}$. Atunci

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \{F \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) : F \text{ este primitivă a lui } f \text{ pe } I\} =$$